ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Signaux et Systèmes 1

Formulaire

Prof. Michael Unser

Novembre 2013

Definitions

Fonctions élementaires	
Saut unité	$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
Monôme causal	$t_+^n = u(t) \cdot t^n$
Sinus cardinal	$\text{sinc}(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$
Fonction rectangle	$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leq t < +\frac{1}{2} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
Propriétés:	
Fonction absolument intégrable	$f \in L_1(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \lvert f(t) \rvert \mathrm{d}t < \infty$
Fonction à énergie finie	$f \in L_2(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \lvert f(t) \rvert^2 \mathrm{d}t < \infty$
Delta de Kronecker	$\delta_n = \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

Définitions (suite)

$j = \sqrt{-1}$

Opérations	
Convolution	$(h * f)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) f(t-\tau) \mathrm{d}\tau$
Renversement	$h^{\vee}(t) = h(-t)$
Transformation de Fourier	
Intégrale de Fourier	$X(\omega) = \mathcal{F}\{x\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$
Partie rélle	$R_X(\omega) = \mathrm{Re}\big(X(\omega)\big)$
Partie imaginaire	$I_X(\omega) = \mathrm{Im}\big(X(\omega)\big)$
Amplitude	$A_X(\omega) = \lvert X(\omega) \rvert$
Phase	$\Phi_X(\omega) = \arctan\left(\frac{I_X(\omega)}{R_X(\omega)}\right)$

Convolution des signaux de base

$f_1(t)$	$f_2(t)$	$(f_1 * f_2)(t) = (f_2 * f_1)(t)$
$f(t)$	$\delta(t-T)$	$f(t-T)$
$u(t)$	$u(t)$	$u(t) \cdot t = t_+$
$u(t) \cdot e^{s_1 t}$	$u(t) \cdot e^{s_2 t}$	$\frac{u(t) \cdot e^{s_1 t} - u(t) \cdot e^{s_2 t}}{s_1 - s_2}$ $\quad s_1 \neq s_2$
$u(t) \cdot e^{st}$	$u(t) \cdot e^{st}$	$t_+ e^{st}$
$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} 1 - \lvert t \rvert, & t \in [-1, 1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
$\mathrm{rect}(t/T)$	$\mathrm{rect}(t/T)$	$T\,\mathrm{tri}(t/T)$
$\frac{t_+^n}{n!} = u(t) \cdot \frac{t^n}{n!}$	$\frac{t_+^m}{m!}$	$\frac{t_+^{m+n+1}}{(n+m+1)!}$
$\frac{t_+^n e^{st}}{n!}$	$\frac{t_+^m e^{st}}{m!}$	$\frac{t_+^{m+n+1} e^{st}}{(n+m+1)!}$
$\frac{t_+^n}{n!}$	$u(t) \cdot e^{st}$	$\frac{u(t)}{s^{n+1}} \left(e^{st} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(st)^k}{k!} \right)$

Opérateurs de convolution

Opérateur	Notation	Réponse impulsionnelle	Réponse fréquentielle
Générique	$\mathrm{T}\{\ \}$	$h(t) = \mathrm{T}\{\delta\}(t)$	$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$
Identité	$\mathrm{I}\{\ \}$	$\delta(t)$	1
Décalage	$\mathrm{S}_\tau\{f\}(t) = f(t-\tau)$	$\delta(t-\tau)$	$e^{-j\omega\tau}$
Dérivée	$\mathrm{D}\{\ \} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$	$\delta'(t)$	$j\omega$
Dérivée d'ordre n	$\mathrm{D}^n\{\ \} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$	$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$
Intégrale	$\mathrm{D}^{-1}\{\ \} = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t$	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
Intégrale multiple	$\mathrm{D}^{-n}\{\ \}$	$\frac{t_+^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{j^{n-1}\pi\delta^{(n-1)}(\omega)}{(n-1)!} + \frac{1}{(j\omega)^n}$
Intégrale fractionnaire	$\mathrm{D}^{-\alpha}\{\ \}$	$\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$	$\frac{1}{(j\omega)^\alpha}$ si α non-entier
Système différentiel simple	$(\mathrm{D}-s\mathrm{I})^{-1}\{\ \}$	$u(t)\cdot e^{st}$	$\frac{1}{j\omega - s}$ $\quad \mathrm{Re}(s) < 0$
Système différentiel itéré	$(\mathrm{D}-s\mathrm{I})^{-n}\{\ \}$	$\frac{t_+^{n-1}e^{st}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(j\omega - s)^n}$ $\quad \mathrm{Re}(s) < 0$
Différence finie	$\Delta_+\{\ \}$	$\delta(t) - \delta(t-1)$	$1 - e^{-j\omega}$
Différences finies d'ordre n	$\Delta_+^n\{\ \}$	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k\delta(t-k)$	$(1-e^{-j\omega})^n$
Système récursif avec délai	$(\mathrm{I} - z_0\mathrm{S}_\tau)^{-1}\{\ \}$	$\sum_{k=0}^{+\infty} z_0^k\delta(t-k\tau)$	$\frac{1}{1 - z_0e^{-j\omega\tau}}$ $\quad \lvert z_0\rvert \leq 1$

Signaux périodiques: séries et intégrales de Fourier

Relation	
Signal périodique	$x_T(t) = x_T(t+nT), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
Génération par périodisation (générateur $x(t)$)	$x_T(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(t-nT) = x(t) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT)$
Série de Fourier	$x_T(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
Transformation de Fourier	$X_T(\omega) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$
Coefficients de Fourier	$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)e^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t$
Coefficients de Fourier (manière indirecte)	$c_n = \frac{1}{T}X(n\omega_0)$ avec $X(\omega) = \mathcal{F}\{x\}(\omega)$
Formule de Poisson	$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{jm\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
Formule de Parseval	$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \lvert x_T(t)\rvert^2\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lvert c_n\rvert^2$

Transformation de Fourier: propriétés

Opération	$f(t)$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$
Combinaison linéaire	$\alpha_1\, f_1(t) + \alpha_2\, f_2(t)$	$\alpha_1\, F_1(\omega) + \alpha_2\, F_2(\omega)$
Dualité	$F(t)$	$2\pi \cdot f(-\omega)$
Signal réel	$f(t)$ réel	$F^*(\omega) = F(-\omega)$ (symétrie hermitienne)
Renversement	$f(-t)$	$F(-\omega)$
Complexe conjugué	$f(t)^*$	$F(-\omega)^*$
Dilatation	$f(t/a)$	$\|a\|F(a\omega)$
Translation	$f(t-t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Modulation	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
Convolution	$(h * f)\,(t)$	$H(\omega)F(\omega)$
Multiplication	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\,(F_1 * F_2)\,(\omega)$
Différentiation	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
Multiplication par un monôme	$t^n f(t)$	$j^n \frac{\mathrm{d}^n F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
Intégration	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$

Transformation de Fourier: signaux usuels

(a) Signaux à énergie finie

$f(t)$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$
$u(t)e^{st}$	$\frac{1}{j\omega - s}, \quad \mathrm{Re}(s) < 0$
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}, \quad a > 0$
$\frac{t_+^n e^{st}}{n!}$	$\frac{1}{(j\omega - s)^{n+1}}, \quad \mathrm{Re}(s) < 0$
$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
$\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\left(\frac{\pi t}{T}\right)}$	$T \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2}$	$e^{-\sigma^2\omega^2/2}$

(b) Distributions tempérées

$f(t)$	$F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\omega_0 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\big(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\big)$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi\big(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\big)$

Transformation de Fourier généralisée:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \phi \in \mathcal{S}, \quad \tfrac{1}{2\pi}\langle F, \mathcal{F}\{\phi\}\rangle = \langle f, \phi\rangle$$

Transformation de Fourier: relations intégrales

Relation	
Transformation directe	$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$
Transformation inverse	$\mathcal{F}^{-1}\{F\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega \overset{\text{p.p.}}{=} f(t)$
Intégrale	$\int_{\mathbb{R}} f(t) \mathrm{d}t = F(0)$
Moments	$\int_{\mathbb{R}} t^n f(t) \mathrm{d}t = j^n \left. \frac{\mathrm{d}^n F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n} \right\|_{\omega=0}$
Parseval	$\int_{\mathbb{R}} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} X(\omega) Y^*(\omega) \mathrm{d}\omega \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle X, Y \rangle$
Conservation d'énergie	$E = \int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|F(\omega)\|^2 \mathrm{d}\omega$
Convolution: $(x * y)(t)$	$\int_{\mathbb{R}} x(\tau) y(t-\tau) \mathrm{d}\tau \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(\omega) \cdot Y(\omega)$
Intercorrélation: $c_{xy}(t)$ (cas réel)	$\int_{\mathbb{R}} x(\tau) y(t+\tau) \mathrm{d}\tau \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X^*(\omega) \cdot Y(\omega)$